

Exercice 2 [E3A PC 2024]

Q5. Si $0 \leq x \leq 1$, on a $x^2 \leq x$ alors que si $x \geq 1$, $x^2 \geq x$.

Q6. La fonction $t \mapsto \sin(t^\alpha)$ est dérivable sur $[1, +\infty[$ comme composée de fonctions usuelles (sinus et puissance).

$\forall t \geq 1$, $f'(t) = \alpha t^{\alpha-1} \cos(t^\alpha)$ par dérivée d'une composée.

Q7. La fonction φ est dérivable sur $[1, +\infty[$ comme quotient de la fonction f dérivable par Q6 et $t \mapsto t$ dérivable qui ne s'annule pas sur cet intervalle.

$$\forall t \geq 1, \varphi'(t) = \frac{f'(t) \cdot t - f(t) \cdot 1}{t^2} \stackrel{Q6}{=} \frac{\alpha t^\alpha \cos(t^\alpha) - \sin(t^\alpha)}{t^2}$$

Q8. Soit $t \geq 1$. D'après la question précédente, on a

$$|\varphi'(t)| = \frac{|\alpha t^\alpha \cos(t^\alpha) - \sin(t^\alpha)|}{t^2} \stackrel{\text{inégalité triangulaire}}{\leq} \frac{|\alpha t^\alpha \cos(t^\alpha)| + |\sin(t^\alpha)|}{t^2} \leq \frac{\alpha t^\alpha + 1}{t^2}$$

$\forall x \in \mathbb{R}, |\sin x| \leq 1 \text{ et } |\cos x| \leq 1$

Q9. Soit $n \in \mathbb{N}^*$.

Pour $t \in [n, n+1]$, on a $|\varphi'(t)| \stackrel{Q8}{\leq} \frac{\alpha t^\alpha + 1}{t^2} = \frac{1}{t^2} + \frac{\alpha}{t^{2-\alpha}} \stackrel{t \geq n}{\leq} \frac{1}{n^2} + \frac{\alpha}{n^{2-\alpha}}$

majoration indépendante de t .

Comme φ est continue sur $[n, n+1]$ et dérivable sur $]n, n+1[$ (par Q7), d'après l'inégalité des accroissements finis, on a

$$\forall t \in [n, n+1], |\varphi(t) - \varphi(n)| \leq \left(\frac{1}{n^2} + \frac{\alpha}{n^{2-\alpha}} \right) |t - n|$$

Q10. Soit $n \in \mathbb{N}^*$.

$$|u_n - a_n| = \left| \int_n^{n+1} \varphi(t) dt - \varphi(n) \right| = \left| \int_n^{n+1} \varphi(t) dt - \int_n^{n+1} \varphi(n) dt \right| \stackrel{\text{linéarité}}{=} \left| \int_n^{n+1} (\varphi(t) - \varphi(n)) dt \right|$$

$$\stackrel{\text{inégalité triangulaire}}{\leq} \int_n^{n+1} |\varphi(t) - \varphi(n)| dt \stackrel{Q9}{\leq} \int_n^{n+1} \left(\frac{1}{n^2} + \frac{\alpha}{n^{2-\alpha}} \right) |t - n| dt = \left(\frac{1}{n^2} + \frac{\alpha}{n^{2-\alpha}} \right) \int_n^{n+1} |t - n| dt$$

≤ 1 car $t \in [n, n+1]$

$$\leq \left(\frac{1}{n^2} + \frac{\alpha}{n^{2-\alpha}} \right) \int_n^{n+1} 1 dt = \frac{1}{n^2} + \frac{\alpha}{n^{2-\alpha}}$$

Q11. La fonction $t \mapsto \frac{\cos t}{t^2}$ est continue sur $[1, +\infty[$.

Pour $t \geq 1$, on a $0 \leq \left| \frac{\cos t}{t^2} \right| = \frac{|\cos t|}{t^2} \leq \frac{1}{t^2}$.

Or la fonction $t \mapsto \frac{1}{t^2}$ est intégrable sur $[1, +\infty[$ (Riemann, cours avec $2 > 1$)

Par comparaison, on en déduit que $t \mapsto \frac{\cos t}{t^2}$ est intégrable sur $[1, +\infty[$.

Q12. La fonction $t \mapsto \frac{\sin t}{t}$ est continue sur $[1, +\infty[$.

On pose $\begin{cases} u = \frac{1}{t} \\ v' = \sin t \end{cases} \quad \begin{cases} u' = -\frac{1}{t^2} \\ v = -\cos t \end{cases}$

• u et v sont de classe $\mathcal{C}^1$ sur $[1, +\infty[$

• $(uv)(1) = -\cos(1) \in \mathbb{R}$

• $(uv)(t) = \frac{-\cos t}{t} \xrightarrow[t \rightarrow +\infty]{} 0$ (car $0 \leq \left| \frac{-\cos t}{t} \right| \leq \frac{1}{t}$)

Ainsi, par intégration par parties généralisée, $\int_1^{+\infty} \frac{\sin t}{t} dt$ et $\int_1^{+\infty} \frac{\cos t}{t^2} dt$ sont

de même nature, i.e. convergente d'après Q11.

[Remq: on peut aussi rédiger comme Q18.]

Q13. On pose $t = u^\alpha$ dans l'intégrale de Q12 qui est convergente (ce changement de variable est bien de classe $\mathcal{C}^1$ et strictement croissant):

$$\int_1^{+\infty} \frac{\sin t}{t} dt = \int_1^{+\infty} \frac{\sin(u^\alpha)}{u^\alpha} \alpha u^{\alpha-1} du = \alpha \int_1^{+\infty} \frac{\sin(u^\alpha)}{u} du.$$

En particulier, l'intégrale $\int_1^{+\infty} \frac{\sin(u^\alpha)}{u} du$ est convergente.

Q14. La somme partielle d'indice $N \in \mathbb{N}^*$ de la série $\sum_{n \geq 1} u_n$ est

$$\sum_{n=1}^N u_n = \sum_{n=1}^N \int_n^{n+1} \varphi(t) dt \stackrel{\text{Chap. 1}}{=} \int_1^{N+1} \varphi(t) dt \xrightarrow[N \rightarrow +\infty]{\text{Q13}} \int_1^{+\infty} \varphi(t) dt$$

puisque cette dernière intégrale est convergente.

Comme la suite des sommes partielles admet une limite finie, par définition, la série $\sum u_n$ est convergente.

Q15. D'après Q10, on a, pour tout $n \geq 1$, $|u_n - a_n| \leq \frac{1}{n^2} + \frac{\alpha}{n^{2-\alpha}}$.

Or $\alpha < 1$ donc $2-\alpha > 1$. En particulier les séries de Riemann $\sum \frac{1}{n^2}$ et $\sum \frac{1}{n^{2-\alpha}}$ sont convergentes donc par comparaison de termes positifs, la série $\sum |u_n - a_n|$ converge donc $\sum (u_n - a_n)$ converge.

Q16. Pour $n \geq 1$, on écrit $a_n = v_n - (v_n - a_n)$.

Comme les séries $\sum v_n$ et $\sum v_n - a_n$ convergent (Q14 et Q15), par linéarité on en déduit que $\sum a_n$ converge.

Q17. Pour tout $n \geq 1$, $0 \leq \frac{\sin^2(n^\alpha)}{n} = \frac{|\sin(n^\alpha)|^2}{n} \underset{\substack{\text{Q5 avec} \\ 0 \leq |\sin(n^\alpha)| \leq 1}}{\leq} \frac{|\sin(n^\alpha)|}{n} = |a_n|.$

Comme on a supposé que $\sum_{n \geq 1} |a_n|$ converge, par comparaison de termes positifs, $\sum_{n \geq 1} \frac{\sin^2(n^\alpha)}{n}$ converge.

Q18. La fonction $x \mapsto \frac{\cos(2x)}{x}$ est continue sur $[1, +\infty[$.

Soit $X \in [1, +\infty[$.

On pose $\begin{cases} u = \frac{1}{x} \\ v' = \cos(2x) \end{cases} \quad \begin{cases} u' = -\frac{1}{x^2} \\ v = \frac{1}{2} \sin(2x) \end{cases}$ u et v sont de classe $\mathcal{C}^1$ sur $[1, X]$.

Par intégration par parties sur le segment $[1, X]$, on a

$$\int_1^X \frac{\cos(2x)}{x} dx = \left[\frac{\sin(2x)}{2x} \right]_1^X + \int_1^X \frac{\sin(2x)}{2x^2} dx$$

Or le crochet admet une limite finie lorsque $X \rightarrow +\infty$ (car $0 \leq \left| \frac{\sin(2x)}{2x} \right| \leq \frac{1}{2x}$) donc les intégrales $\int_1^{+\infty} \frac{\cos(2x)}{x} dx$ et $\int_1^{+\infty} \frac{\sin(2x)}{2x^2} dx$ sont de même nature (*).

Enfin, $\forall x \geq 1$, $0 \leq \left| \frac{\sin(2x)}{2x^2} \right| \leq \frac{1}{2x^2}$ et $\int_1^{+\infty} \frac{dx}{x^2}$ converge (Riemann avec $2 > 1$) donc par comparaison $\int_1^{+\infty} \frac{\sin(2x)}{2x^2} dx$ converge absolument donc converge.

D'après (*), on obtient alors $\text{la convergence de } \int_1^{+\infty} \frac{\cos(2x)}{x} dx$. Rem: on peut aussi rédiger comme Q12.

Q19. $\forall n \geq 1$, $\frac{\cos(2n^\alpha)}{n} \underset{\substack{\uparrow \\ \text{formule} \\ \text{duplication}}}{=} \frac{1 - 2\sin^2(n^\alpha)}{n}$ ce qui peut se réorganiser en

$$\frac{1}{n} = \frac{\cos(2n^\alpha)}{n} + 2 \frac{\sin^2(n^\alpha)}{n}.$$

D'après Q17 et le résultat admis dans l'énoncé, le membre de droite est le terme général d'une série convergente donc cela signifie que $\sum \frac{1}{n}$ converge, ce qui est faux (série harmonique ou Riemann). L'hypothèse de départ est donc fautive: $\sum a_n$ n'est pas absolument convergente.